

STUDY BUDDY · BASIS PENGETAHUAN RAG

Ringkasan Materi Aljabar Linear & Sistem Persamaan Linier

Rangkuman padat dari Buku Aljabar Linear (Syarifuddin, Mikrayanti, & Muslim, 2016) dan E-Modul Sistem Persamaan Linier (SPL) berbasis RME. Disusun sebagai dokumen referensi untuk asisten belajar berbasis AI.

Daftar Isi

1. Matriks dan Operasi Matriks
2. Determinan Matriks
3. Rank (Pangkat) Matriks
4. Matriks Invers
5. Vektor dan Ruang Vektor
6. Sistem Persamaan Linier (SPL)
7. Jenis Solusi SPL
8. Matriks Augmented & OBE
9. Transformasi Linear
10. Nilai Eigen & Vektor Eigen

1. Matriks dan Operasi Matriks

Definisi. Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun dalam bentuk persegi panjang menurut baris (horizontal) dan kolom (vertikal). Matriks dengan m baris dan n kolom disebut berordo $m \times n$. Elemen ditulis a_{ij} , dengan i = baris dan j = kolom.

Jenis-jenis Matriks

- **Matriks baris/kolom:** hanya memiliki satu baris atau satu kolom.
- **Matriks persegi:** jumlah baris = jumlah kolom ($n \times n$).
- **Matriks nol:** semua elemennya 0.
- **Matriks diagonal:** elemen di luar diagonal utama bernilai 0.
- **Matriks identitas (I):** matriks diagonal dengan elemen diagonal = 1.
- **Matriks segitiga atas/bawah:** elemen di bawah/atas diagonal utama = 0.
- **Matriks simetris:** $A = A^T$ (sama dengan transposnya).

Operasi pada Matriks

- **Penjumlahan/Pengurangan:** hanya untuk matriks berordo sama, dilakukan elemen per elemen.
- **Perkalian skalar:** setiap elemen dikalikan skalar k .
- **Perkalian matriks:** $A(m \times n) \times B(n \times p) = C(m \times p)$. Elemen c_{ij} = jumlah hasil kali baris ke- i A dengan kolom ke- j B. Syarat: jumlah kolom A = jumlah baris B.
- **Transpos (A^T):** menukar baris menjadi kolom.

Sifat Operasi

- $A + B = B + A$ (komutatif terhadap penjumlahan).
- Perkalian matriks umumnya **TIDAK komutatif**: $AB \neq BA$.
- $(AB)C = A(BC)$ (asosiatif); $A(B+C) = AB + AC$ (distributif).
- $(A^T)^T = A$; $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Determinan Matriks

Definisi. Determinan adalah nilai skalar yang dihitung dari matriks persegi, ditulis $\det(A)$ atau $|A|$. Determinan menentukan apakah matriks memiliki invers ($\det \neq 0$) atau tidak ($\det = 0$, disebut matriks singular).

Determinan 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = ad - bc$$

Metode Menghitung Determinan

- **Metode Sarrus (khusus 3×3):** menyalin dua kolom pertama ke kanan, lalu menjumlahkan hasil kali diagonal turun dikurangi hasil kali diagonal naik.
- **Reduksi Baris:** mengubah matriks menjadi segitiga; determinan = hasil kali elemen diagonal utama (dengan memperhatikan efek operasi baris).
- **Eksansi Kofaktor:** $\det(A) = \sum a_{ij} \cdot C_{ij}$, dengan kofaktor $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, dan M_{ij} = minor (determinan submatriks).

Sifat Determinan

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- Jika satu baris/kolom bernilai nol, maka $\det = 0$.
- Menukar dua baris mengubah tanda determinan.
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Jika ada dua baris/kolom yang sama atau kelipatan, maka $\det = 0$.

3. Rank (Pangkat) Matriks

Definisi. Rank suatu matriks adalah jumlah maksimum baris (atau kolom) yang bebas linear, yaitu banyaknya baris tak-nol setelah matriks diubah ke bentuk eselon baris melalui Transformasi/Operasi Baris Elementer.

Transformasi Elementer

- Menukar posisi dua baris.
- Mengalikan sebuah baris dengan skalar tak-nol.
- Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lain.

Rank digunakan untuk menganalisis keberadaan dan jumlah solusi SPL. Jika rank matriks koefisien = rank matriks augmented = jumlah variabel, maka SPL punya solusi tunggal.

4. Matriks Invers

Definisi. Invers dari matriks persegi A adalah matriks A^{-1} sehingga $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Invers hanya ada jika $\det(A) \neq 0$ (matriks non-singular).

Invers Matriks 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/(ad - bc)) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Metode Mencari Invers

- **Adjoin:** $A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot \text{adj}(A)$, dengan $\text{adj}(A)$ = transpos matriks kofaktor.
- **Operasi Baris Elementer (OBE):** bentuk $[A \mid I]$, lakukan OBE hingga menjadi $[I \mid A^{-1}]$.

Sifat Invers

- $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

5. Vektor dan Ruang Vektor

Vektor dan Operasinya

- **Vektor:** besaran yang memiliki nilai (besar) dan arah.
- **Panjang (Norm):** $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$.
- **Hasil Kali Dalam (Dot Product):** $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots = \|u\|\|v\| \cos\theta$. Jika $u \cdot v = 0$, kedua vektor ortogonal (tegak lurus).
- **Hasil Kali Silang (Cross Product):** menghasilkan vektor baru yang tegak lurus terhadap kedua vektor asal (khusus di ruang 3 dimensi).
- **Proyeksi Ortogonal:** proyeksi vektor u pada $v = ((u \cdot v)/\|v\|^2) v$.

Ruang Vektor & Konsep Turunannya

- **Ruang Vektor Real:** himpunan vektor yang tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu.
- **Subruang:** himpunan bagian dari ruang vektor yang juga merupakan ruang vektor.
- **Kombinasi Linear:** vektor $w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$.
- **Bebas Linear:** sekumpulan vektor bebas linear jika $k_1v_1 + \dots + k_nv_n = 0$ hanya dipenuhi oleh semua $k = 0$. Jika ada $k \neq 0$, maka bergantung linear.
- **Basis:** himpunan vektor yang bebas linear dan merentang (span) seluruh ruang vektor.
- **Dimensi:** jumlah vektor dalam basis suatu ruang vektor.

6. Sistem Persamaan Linier (SPL)

Definisi. SPL adalah kumpulan dua atau lebih persamaan linear yang memuat variabel yang sama, dan harus diselesaikan secara bersamaan. Ciri persamaan linear: setiap variabel berpangkat satu dan tidak ada perkalian antar variabel.

Contoh kontekstual (informatika): Modul pembayaran = 2 backend + 1 frontend selesai dalam 11 jam; Modul katalog = 1 backend + 2 frontend selesai dalam 10 jam. Jika x = waktu 1 backend dan y = waktu 1 frontend, maka: $2x + y = 11$ dan $x + 2y = 10$. Solusi: $x = 4$, $y = 3$.

Metode Penyelesaian SPL

- **Metode Grafik:** menggambar tiap persamaan sebagai garis; titik potong adalah solusi.
- **Substitusi:** menyatakan satu variabel dari satu persamaan, lalu memasukkannya ke persamaan lain.
- **Eliminasi:** menghilangkan satu variabel dengan menjumlah/mengurangkan persamaan.
- **Operasi Baris Elementer (OBE) / Matriks Augmented.**
- **Eliminasi Gauss:** mengubah matriks augmented ke bentuk eselon baris, lalu substitusi mundur.
- **Eliminasi Gauss–Jordan:** mengubah ke bentuk eselon baris tereduksi (diagonal 1, lainnya 0) sehingga solusi langsung terbaca.

SPL Homogen

SPL homogen adalah SPL yang semua konstanta ruas kanannya nol (bentuk $AX = 0$). SPL homogen selalu memiliki minimal solusi trivial (semua variabel = 0), dan dapat memiliki solusi non-trivial jika determinan koefisien = 0.

7. Jenis Solusi SPL

Jenis Solusi	Kondisi	Interpretasi Geometris
Solusi Tunggal	Kedua garis/bidang berpotongan di satu titik; koefisien tidak sebanding.	Garis berpotongan (satu titik).
Tanpa Solusi	Setelah eliminasi muncul pernyataan mustahil, mis. $0 = -8$.	Garis sejajar (tidak pernah berpotongan).
Banyak Solusi	Setelah eliminasi muncul $0 = 0$; ada variabel bebas.	Garis berimpit (saling menutupi).

Kaitan informatika: pada kasus solusi tunggal aplikasi menghasilkan output pasti; pada kasus tanpa solusi (data tidak konsisten) proses gagal; pada banyak solusi terdapat variabel bebas sehingga solusi ditulis parametrik.

8. Matriks Augmented & Operasi Baris Elementer

Matriks Augmented. Bentuk penyajian SPL sebagai satu matriks gabungan koefisien variabel dan konstanta, dipisah garis. Variabel x, y, z tidak perlu ditulis ulang karena posisinya diwakili kolom.

SPL:	Matriks Augmented:
$x + y + z = 6$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 6 \end{bmatrix}$
$2x + y + z = 9$	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & & 9 \end{bmatrix}$
$x + 2y + 3z = 14$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & & 14 \end{bmatrix}$

Tiga Aturan OBE

1. Menukar dua baris ($R_i \leftrightarrow R_j$).
2. Mengalikan suatu baris dengan skalar tak-nol (kR_i).
3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lain ($R_i + kR_j$).

Menukar urutan baris **tidak mengubah solusi** SPL, karena hanya mengubah urutan penulisan persamaan.

Solusi Parametrik (Banyak Solusi)

Jika muncul baris nol ($0 = 0$), salah satu variabel dijadikan parameter bebas, misalnya $z = t$. Variabel lain dinyatakan dalam t , misalnya $x = 4 - 2t + s$. Munculnya variabel bebas terjadi ketika jumlah informasi (persamaan bebas) lebih sedikit daripada jumlah variabel.

9. Transformasi Linear

Definisi. Transformasi linear adalah pemetaan $T: V \rightarrow W$ yang memenuhi dua sifat: (1) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, dan (2) $T(kv) = k \cdot T(v)$.

- **Matriks Transformasi:** setiap transformasi linear dapat dinyatakan dengan perkalian matriks, $T(x) = A x$.
- **Macam transformasi (di $\mathbb{R}^2$):** dilatasi (perbesaran/pengecilan), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan translasi/shear.

10. Nilai Eigen & Vektor Eigen

Definisi. Untuk matriks persegi A , vektor tak-nol v disebut vektor eigen jika $A v = \lambda v$, dengan λ (skalar) disebut nilai eigen. Artinya transformasi A hanya meregangkan/menyusutkan v tanpa mengubah arahnya.

Cara Mencari

1. Susun persamaan karakteristik: $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Selesaikan untuk memperoleh nilai eigen λ .
3. Substitusi tiap λ ke $(A - \lambda I)v = 0$ untuk memperoleh vektor eigen v .

Analogi sederhana: vektor eigen adalah “arah istimewa” yang tidak berubah arah saat matriks diterapkan; nilai eigen adalah faktor peregangannya. Konsep ini dipakai luas di informatika: PageRank, kompresi (PCA), dan machine learning.

Dokumen ringkasan ini disusun sebagai basis pengetahuan untuk asisten belajar berbasis AI (RAG). Sumber: Buku Aljabar Linear (LPP Mandala, 2016) & E-Modul Sistem Persamaan Linier berbasis RME.